

La didactique des mathématiques

Depuis les origines de la civilisation, les savants, les philosophes, les pédagogues et, plus récemment, les psychologues s'interrogent sur les conditions dans lesquelles un élève acquiert des connaissances.

L'épistémologie génétique et la didactique

Dans les écoles de philosophie de l'Antiquité grecque, la maïeutique de Socrate détermine que chaque homme détient tout le savoir universel. Ainsi le pédagogue, cet esclave chargé de l'éducation des enfants, a pour tâche de permettre à cette connaissance de se révéler dans les meilleures conditions.

Les conceptions de l'apprentissage

Une conception dogmatique du savoir trouve ses fondements dans le fait de définir de nombreux points de doctrine établis et regardés comme vérité fondamentale et incontestable. Cette conception de l'apprentissage conduit à des répétitions inlassables de mêmes textes considérés comme essentiels.

La scolastique médiévale, pensée universitaire inspirée de la théologie, dogmatise la pensée scientifique d'Aristote. D'un mode rationnel à un mode formel, elle place la perception des concepts avant celle des choses. Son influence sur l'éducation s'étend jusqu'à la Renaissance.

La théologie et l'éducation religieuse influencent profondément les conceptions classiques qui conduisent aux pratiques traditionnelles de l'enseignement. C'est ainsi qu'au siècle des Lumières, des hommes de lettres s'opposent à ces principes d'éducation et développent des idées nouvelles. Ainsi, dans L'Émile de Jean-Jacques Rousseau : « Il s'agit moins d'apprendre à l'élève la vérité que de lui montrer comment il faut s'y prendre pour découvrir toujours la vérité. »

Le début du XXe siècle hérite de ces conceptions ancestrales fondées sur la qualité de l'exposé, la répétition et la mémoire de l'élève, plutôt que son intelligence. L'histoire de l'enseignement évoque de nombreuses recherches et théories sur les apprentissages et sur la nature de l'intelligence. Les chercheurs en didactique des mathématiques soulignent le peu de réalisme de ces interprétations classiques. Ils définissent leurs théories en référence aux conceptions constructivistes de l'apprentissage. C'est pour cette raison que le présent ouvrage choisit d'évoquer plus particulièrement les travaux en psychologie et en épistémologie de Jean Piaget.

La psychologie génétique de Piaget est liée à des recherches en science de la logique (étude des conditions formelles de la connaissance et de la vérité) et en sémiotique (étude des fonctions symboliques). Il développe l'idée qu'il existe une dialectique de l'objet et du sujet. Né à Genève, en Suisse, en 1896 et mort en 1980, ce psychologue entre dans la légende un peu à la manière des hommes célèbres. Tout au long de ses recherches, il s'intéresse au développement de la pensée logique de l'enfant; il accorde peu d'importance aux problèmes liés à l'affectivité, non pas par désintérêt, mais parce que selon lui l'affectivité ne constitue pas l'origine des structures de la connaissance. Il souhaite étudier le développement cognitif de l'enfant, à savoir la conquête de la

connaissance et le développement de l'intelligence dans la mesure où ils permettent une adaptation au milieu. La finalité de ses recherches est l'adaptation de l'individu à son environnement; elle est caractéristique de tout être vivant. L'intelligence humaine est alors considérée comme la forme la plus fine qui, grâce à une série d'adaptations successives, permet d'atteindre un état d'équilibre des relations entre le sujet et le milieu. Cette notion d'adaptation est centrale dans l'œuvre de Piaget. Aussi affirme-t-il que les actions de l'enfant sur l'environnement sont cruciales pour son développement. C'est ce qu'on appelle le constructivisme piagétien.

L'enfant se construit en jeune scientifique

Cette notion de constructivisme sous-entend que l'enfant se construit en jeune scientifique. Il émet des hypothèses, puis il les teste de façon à se construire une représentation cohérente du monde. Dans cette construction, Piaget met l'accent sur l'action individuelle de l'enfant et minimise l'environnement social. Il s'agit pour lui d'une construction dans le rapport actif du sujet à l'environnement et non d'une reproduction passive de quelque vérité que ce soit.

Dans la théorie piagétienne, la pensée de l'enfant se développe en suivant une évolution obligatoire et ce quel que soit l'environnement. Elle passe par un certain nombre de stades qui acheminent l'enfant vers la pensée adulte. Piaget précise toutefois que tous les enfants ne parcourent pas ce chemin à la même allure et que certains n'atteignent pas la dernière étape. Néanmoins, il pense que tous suivent le même itinéraire et ceci presque toujours dans le même ordre.

L'œuvre de Piaget conçoit l'intelligence comme une forme d'adaptation biologique. Ainsi l'adaptation cognitive est-elle considérée comme son prolongement: c'est donc la forme d'équilibre supérieur.

Deux concepts caractérisent l'incorporation d'éléments du milieu à la structure de l'individu. Ils permettent de comprendre les processus d'adaptation et de forme d'équilibre; c'est ce qu'il définit comme l'assimilation et l'accommodation.

Assimilation et accommodation

L'assimilation est le processus par lequel un être vivant s'approprie un élément du milieu en lui imposant ses structures propres. Elle caractérise l'incorporation d'éléments du milieu à la structure de l'individu; elle s'accompagne d'une déformation de la chose assimilée. Le jeu est le prototype des conduites d'assimilation en psychologie car l'individu peut déformer le réel à sa guise, de façon à l'assimiler.

En d'autres termes, lorsqu'un enfant est face à une situation nouvelle, il essaie tout d'abord d'intégrer et d'identifier cette situation par rapport à des repères connus. Cette façon de procéder peut être suffisante, mais peut aussi nécessiter la modification des structures existantes ou nécessiter la conception de nouvelles. Il s'agit alors du processus d'accommodation qui va conduire à un nouvel équilibre.

L'accommodation est le processus par lequel un être modifie ses propres structures de façon à s'approprier les objets qui lui résistent et ainsi surmonter cette résistance.

Ces deux notions sont fondamentales dans l'approche piagétienne. Ce sont les conditions nécessaires à l'individu pour se former et faire des acquisitions de manière progressive et ainsi apprendre. Ces processus vont aboutir à l'équilibration entre le sujet et le milieu. Piaget développe la notion d'adaptation lorsque l'équilibre entre l'assimilation et l'accommodation est satisfaisant.

La notion de stade explicitée par Piaget peut être assimilée à des systèmes stables dans l'évolution génétique de l'enfant. Il est à noter que l'adaptation se fait par l'action qui ne revêt pas la seule dimension motrice mais qui doit prendre en compte l'acte de mentalisation de l'enfant. La notion de stade repose sur les principes suivants : chaque stade correspond à un mode de pensée; les stades ont un ordre de succession invariant. Un stade comporte un niveau de préparation et d'achèvement et chaque stade a un caractère intégratif, c'est-à-dire que les structures construites à un âge donné deviennent parties intégrantes des structures de l'âge suivant. Comment le passage d'un stade à un autre se fait-il ? À un moment donné, l'enfant est satisfait de son mode de pensée; l'équilibre par rapport aux exigences du milieu est satisfaisant, mais tout à coup certaines expériences font prendre conscience à l'enfant des limites de son raisonnement. Il se trouve donc dans l'obligation de modifier sa propre réflexion, de façon à dépasser ses limites et à atteindre un équilibre plus satisfaisant. Une fois ce réajustement établi, un nouvel état d'équilibre plus stable sera atteint. Il convient de noter que, quelle que soit l'approche, la psychologie conçoit toujours le développement comme une succession d'étapes clairement objectivables et ce, quelle que soit la culture et quel que soit le milieu socioculturel du sujet. Les études de Piaget tentent en effet de comprendre les processus de formation de genèse et les formes d'équilibre des stades du développement cognitif.

Dans la théorie piagétienne, la notion de stades de développement est assimilée à un processus actif d'accroissement et de construction des opérations mentales. L'acquisition des connaissances ne se fait pas comme un enchevêtrement. Il est nécessaire alors de favoriser l'évolution d'une étape à une autre.

Le développement cognitif est une recherche progressive d'équilibre, le passage d'un état de moindre équilibre à un équilibre supérieur. En somme, une connaissance nouvelle est préparée et rendue possible par les acquis antérieurs. Piaget détermine des stades de développement qui constituent des paliers de recherche d'équilibre.

L'intelligence sensori-motrice

Il distingue la période de l'intelligence sensori-motrice jusqu'à l'âge de deux ans. Cette période est caractérisée par une intelligence pratique qui met en jeu les sens et la motricité, sans représentations mentales. Cette période se développe autour des réflexes innés auxquels l'enfant a recours et qu'il perfectionne. C'est une intelligence en situation qui s'appuie sur l'action, les gestes, les mouvements.

Cette période connaît une évolution rapide. En effet, peu à peu le jeune enfant modifie ses conduites en situation. Il apprend à l'aide de méthodes d'essais et d'erreurs. Il ne se différencie pas du monde qui l'entoure. Dans cette période, la construction de l'espace est pour l'enfant une multitude d'espaces, autant que de domaines sensoriels. Ils ne sont pas coordonnés entre eux. C'est peu à peu que l'enfant parvient à élaborer certaines associations.

L'enfant acquiert vers l'âge de onze mois la notion de déplacement des objets les uns par rapport aux autres. La représentation spatiale n'est pas détachée de l'action.

C'est vers l'âge de dix-huit mois que le jeune enfant est capable de se représenter les relations spatiales entre les objets et de donner du sens à ses propres déplacements. Il lui est possible de se situer dans l'espace comme objet parmi les autres objets dont il construit la réalité et l'existence.

L'intelligence préopératoire

Piaget évoque ensuite la période de l'intelligence préopératoire de deux à six ans.

Cette période est celle de l'intelligence concrète. Elle marque l'ascension progressive vers une intelligence représentative, c'est-à-dire une intelligence où chaque objet est représenté et correspond à une image mentale. Cette image permet d'évoquer l'objet en son absence.

C'est de deux à quatre ans que l'enfant développe cette fonction symbolique qui est la capacité à évoquer des objets ou des situations non perçues à l'aide de signes et de symboles. L'enfant se représente un objet ou un événement par un signifiant différencié qui ne sert que de représentant.

Pendant cette période, l'enfant développe aussi des activités symboliques comme le langage, les images mentales, le jeu symbolique ou le dessin. La fonction symbolique se développe davantage par l'intermédiaire du jeu qui permet à l'enfant de reproduire des situations qui lui plaisent. Le langage accompagne le jeu et permet l'intériorisation progressive.

Entre quatre et cinq ans et demi, c'est la période typique de la pensée préopératoire et égocentrique. Il n'est pas possible pour le jeune enfant de se décentrer de son point de vue. Sa pensée n'est pas réversible. Il semble que les enfants soient tous plongés dans leur univers et qu'ils poursuivent leurs dialogues sans tenir compte d'autrui. Ils déforment la réalité en fonction de leurs besoins, de leur propre vécu et de leur sensibilité.

Cette pensée se caractérise aussi par le syncrétisme. L'enfant a une connaissance globale des choses: il ne lui est pas possible d'en faire une analyse ni même une synthèse. Il confond ce qui est important et ce qui est anodin; il distingue très mal l'imaginaire de la réalité. Cette pensée est encore très intuitive. L'enfant reste centré sur l'apparence des choses; il ne lui est pas possible d'envisager tous les états particuliers de l'objet ou de la situation en un même moment.

Dans cette période, l'espace représentatif se construit. Les relations spatiales maîtrisées relèvent de la topologie comme les rapports de voisinage, l'entourage, la continuité. L'enfant est capable de percevoir comme constante la forme d'un objet qui change d'orientation, il est capable d'attribuer une taille constante à un objet qui s'éloigne. La conservation des longueurs semble acquise vers l'âge de six ou sept ans.

L'intelligence des opérations concrètes

Enfin Piaget définit la période de l'intelligence des opérations concrètes, de sept jusqu'à environ

douze ans.

Cette période est marquée par la socialisation. L'enfant est cette fois capable de décentrer sa pensée; il n'est plus centré sur son seul point de vue. De ce fait, l'égoïsme de la pensée disparaît peu à peu. Ainsi l'enfant peut prendre en compte diverses opinions et en tirer des conséquences.

Le raisonnement est plus proche de celui de l'adulte. Les problèmes de conservation des grandeurs sont résolus. L'enfant est capable de justifier son raisonnement par la réversibilité, la compensation ou l'identité. Toutefois, une limite persiste dans le mode de pensée, car l'enfant doit raisonner sur du concret de façon à accéder à la réversibilité de la pensée.

De nombreux éléments de la construction de l'espace semblent acquis vers l'âge de huit ou neuf ans : l'enfant devient capable d'imaginer les différents points de vue possibles d'un même agencement. La conservation des longueurs est définitivement acquise, la conservation des surfaces semble admise vers l'âge de dix ans.

L'intelligence des opérations formelles

C'est une nouvelle structure qui apparaît dans l'intelligence des opérations formelles jusqu'à quinze ou seize ans. C'est une intelligence avec un mode de raisonnement propre à l'adulte. En effet, l'adolescent commence par imaginer ce qui est possible et considère ensuite la réalité. Pour résoudre une situation problème, il envisage les différentes possibilités puis cherche ensuite laquelle serait la plus adéquate ou la plus efficace. C'est un raisonnement scientifique. L'élève n'a plus besoin d'un contact direct avec les objets ou la réalité; il lui est possible de raisonner de manière abstraite et de tirer des conclusions à partir d'idées, d'hypothèses ou de théories.

La pensée formelle atteint un équilibre terminal, c'est ainsi que l'évolution des savoirs et des connaissances se poursuit. Alors que l'élaboration des instruments de connaissances est achevée, la construction de l'espace dans cette période de l'intelligence formelle permet à l'adolescent de comprendre les proportions spatiales liées à l'homothétie : il est capable d'abstraction.

En conclusion, au-delà des limites qui sont maintenant attribuées à l'oeuvre de Piaget, elle demeure un passage incontournable pour l'étude de l'intelligence. Les recherches de ce psychologue lui ont permis d'élaborer des pistes didactiques et pédagogiques dont les principaux traits reposent sur l'importance de mettre en place des situations qui activent la construction des constituants de la logique et de susciter un conflit cognitif qui déstabilise et questionne la nature même des connaissances.

Même si Piaget s'est peu intéressé aux problèmes de l'enseignement, sa théorie remet en cause la conception de l'apprentissage de type behavioriste. Il explicite d'ailleurs quelques critères à respecter dans l'enseignement des mathématiques, à savoir qu'« il importe d'amener l'élève à former les notions et à découvrir lui-même les relations et les propriétés mathématiques plutôt que de lui imposer une pensée adulte toute faite et d'assurer l'acquisition des notions et des processus opératoires avant d'introduire le formalisme et de ne confier à l'automatisme que les opérations assimilées ».

Les études de Piaget soulignent que le développement se poursuit dans l'interaction entre le sujet et les objets. Les psychologues socioconstructivistes ne réfutent pas totalement cette théorie mais cherchent à s'en démarquer: ils s'intéressent en effet à un tout autre paramètre venu d'un

apport extérieur, à l'interaction entre le sujet et les objets. Les recherches en psychologie cognitive de Lev Vygotski privilégient l'importance des ressources de l'environnement social, en particulier la grande importance du langage.

La psychologie cognitive russe

Un détour par les travaux de l'école russe de psychologie cognitive est utile aussi.

Issu d'une famille aisée, Lev Semenovitch Vygotski est né en 1896 et mort en 1934. Il suit des études universitaires de droit, de philosophie et d'histoire. Il se consacre ensuite à des tâches d'enseignement et se fait connaître lors d'un congrès de psychologie à Saint-Pétersbourg. Une chaire de psychologie lui est alors confiée à l'institut psychologique de Moscou.

Ses travaux ne sont connus que depuis assez peu de temps en Europe. Les fondements de ses recherches sont le lien étroit entre la pensée et le langage et la définition de la zone proche de développement.

Vygotski conçoit l'apprentissage comme étant essentiellement le fruit de l'interaction sociale. En effet, ce théoricien de l'apprentissage par le groupe postule que le langage, les théories scientifiques ou la mémorisation ne sont accessibles à l'enfant que dans le cadre de la communication avec l'adulte et de la collaboration avec ses pairs. Ses idées fondamentales sont l'origine sociale de la pensée et de la conscience, le fait que chaque fonction supérieure apparaisse deux fois au cours du développement de l'enfant : une fois de manière collective puis une fois de manière individuelle; le fait que l'apprentissage social et le développement de l'intelligence se passent dans le groupe et par le groupe. C'est ainsi que Vygotski accorde une place très importante aux relations sociales c'est-à-dire à l'environnement et au contexte social dans le développement cognitif.

Il définit la thèse fondamentale de son travail de la manière suivante : la pensée de l'enfant dépend dans son développement de la maîtrise des moyens sociaux de la pensée, comme le langage. En effet, dès ses premières manifestations, le langage prend un caractère social comme première forme de communication avant d'évoluer vers le langage intérieur qui va construire peu à peu la pensée consciente.

Les travaux de Vygotski soulignent que la pensée et la conscience ont une origine sociale. Le développement des fonctions psychologiques supérieures se fonde sur l'interaction entre le développement naturel lié à la maturation biologique, c'est l'approche piagétienne, et le processus d'acquisition culturel dû à l'apprentissage.

C'est ce second aspect qui prend une dimension plus importante dans l'approche vygotkienne. Ici, il s'agit d'origine sociale dans la mesure où les instruments psychologiques que sont le langage et la mémoire prennent naissance dans des situations d'apprentissage où l'activité collective joue un rôle essentiel. Le paramètre social est la source du développement de l'enfant, il en est à l'origine; ce qui résultera aussi de l'appropriation qui en est faite si les fonctions supérieures naissent dans le social; elles sont ensuite intériorisées.

C'est ainsi que Vygotski soutient que chaque fonction supérieure apparaît deux fois au cours du développement de l'enfant. Tout d'abord elle apparaît dans une activité collective soutenue par le groupe ou par l'adulte, puis dans une activité individuelle où elle devient une propriété intériorisée

de la pensée de l'enfant.

Le propos est très bien illustré par l'exemple du langage qui est, dans un premier temps, un moyen de communication, puis qui se transforme peu à peu en langage intérieur et devient enfin un mode de pensée fondamental. Ainsi le fonctionnement des fonctions supérieures exigerait l'appropriation et l'intériorisation d'instruments dans un contexte d'interaction.

C'est ce que Vygotski appelle l'apprentissage. Et ceci n'est possible qu'au sein d'un groupe et de structures sociales qui vont permettre à l'enfant d'apprendre des autres au travers de sa relation à eux. En effet, les personnes qui entourent l'enfant sont actives : elles guident, elles planifient, elles régulent son comportement. Le chercheur les définit comme des agents de développement par rapport au développement et à l'apprentissage.

L'apprentissage selon Vygotski

Vygotski explique qu'il ne suffit pas d'établir le niveau de développement d'un enfant en termes de tâches ou d'actions qu'il est capable de réussir seul, mais qu'il faut savoir clairement comment il va évoluer. Son idée est qu'il est possible d'avoir un aperçu de l'évolution future en examinant de manière précise ce qu'il est capable de faire avec un minimum d'aide.

Les recherches montrent incontestablement que ce qui est dans la zone proche de développement à un stade d'âge donné se réalise et se transforme en niveau de développement présent. Au stade suivant, dit d'une autre manière, ce que l'élève sait faire maintenant en collaboration, il saura le faire seul demain. C'est ainsi qu'il est vraisemblable qu'à l'école, la zone de proche développement est au niveau de développement présent.

Le seul apprentissage valide pendant l'enfance est celui qui anticipe sur le développement et le fait bien sûr progresser. Mais il ne faut pas oublier qu'il n'est possible d'enseigner à l'enfant que ce qu'il est déjà capable d'apprendre.

Vygotski dit qu'entre deux types d'activités se constitue la zone proche de développement. C'est un espace où le développement est en devenir. C'est bien la nature même de cette zone proche de développement qui aide le maître à connaître les capacités futures de l'enfant et la dynamique de son développement. C'est elle qui détermine les possibilités de l'apprentissage. Cette zone se doit d'être reconnue et exploitée par le maître : elle définit de manière précise les fonctions qui ne sont pas encore parvenues à maturation mais qui sont en train de mûrir.

L'état des recherches souligne que l'apprentissage a pour base ce qui est encore immature. Dans cette perspective, un bon apprentissage est celui qui précède le développement. Le maître doit se situer dans cette zone et comprendre comment se structurent les différentes connaissances pour chacun de ses élèves, ensuite seulement il pourra solliciter de manière efficace l'élève dans la zone proche de développement. Le principal problème pédagogique est d'adapter l'intervention du maître à la zone proche de développement de l'élève. L'apprentissage en effet doit précéder le développement et, par conséquent, provoquer des ruptures avec celui qui est spontané. Cette rupture ne doit pas être trop grande : elle doit se situer dans la zone proche de développement de façon à introduire une dynamique qui fait avancer l'élève dans le cheminement de ses apprentissages.

L'apprentissage précède le développement

En conclusion, la théorie de Vygotski souligne le fait que l'enseignement doit stimuler les

processus en évolution qui ne pourraient ni être actualisés ni formalisés sans lui. L'apprentissage précède le développement. Afin que les choses se déroulent ainsi, le maître doit tenir compte de la zone proche de développement de l'élève et doit connaître la distance entre ce que l'élève fait seul et ce qu'il fait avec de l'aide.

Cette théorie prend naissance dans les interactions sociales tout en sachant que le développement de la connaissance procède du social vers l'individuel. Ainsi, l'enjeu didactique est important puisque c'est en apprenant à résoudre une situation avec une personne ou un maître qui maîtrise le schème que l'élève progresse et qu'il construit à son tour le schème. Cette zone proche de développement sollicite l'interaction sociale par le partenariat et la confrontation entre pairs désignés comme élèves cognitivement proches.

Vygotski ajoute que cette distance ne doit pas être très importante car elle implique de manière inévitable de la part de l'élève l'acceptation d'un savoir sans questionnement véritable. D'une manière plus pragmatique, le maître propose à l'élève une situation d'apprentissage qu'il ne lui est pas possible de résoudre seul. En effet, lorsque l'élève est capable de résoudre seul un problème, c'est qu'il a appris. C'est ce que Vygotski définit comme seuil inférieur de la zone proche de développement. L'élève a besoin de l'aide d'un adulte ou de l'aide d'un pair pour avancer dans la zone et aller au-delà de son seuil inférieur. Les interactions sociales qui trouvent leurs sources au sein de la classe sont fondamentales. L'approche de Vygotski définit bien le langage comme facteur principal de la construction de la pensée et comme puissant outil d'apprentissage.

Dans le même sens, un auteur russe du nom de Davidov fit des recherches dans la lignée des études vygotskiennes. Il s'intéressa à l'analyse théorique de l'activité d'apprentissage à l'école, montrant que cette activité n'est pas liée au développement d'habiletés spécifiques mais consiste avant tout à apprendre à apprendre.

La didactique des mathématiques

Les recherches en didactique des mathématiques empruntent un certain nombre d'hypothèses issues des travaux en épistémologie génétique et en psychologie sociale. Le développement du point de vue constructiviste en pédagogie détermine la recherche de dispositifs d'enseignements qui intègrent le fruit des diverses théories en épistémologie, en sociologie et en didactique. C'est ainsi que se développent en mathématiques diverses pratiques qui privilégient l'activité de l'élève.

L'analyse des processus d'apprentissage dans de tels cadres conduit Guy Brousseau à proposer leur modélisation sous la forme de ce qu'il définit comme la théorie des situations didactiques. En ce sens, la didactique ne se conçoit pas seulement comme une science qui vise à instruire, mais elle se définit clairement comme l'étude des processus de transmission et d'acquisition des différentes connaissances en situation scolaire et universitaire. De ce fait, la pédagogie reconnue comme science de l'éducation des enfants serait l'art et la manière d'enseigner, propre à chacun des maîtres.

La théorie des situations didactiques

Cette approche théorique des processus d'apprentissage propose de décomposer les situations en plusieurs phases distinctes. Dans chacune de ces phases clairement définies, le savoir n'a pas la même fonction ni le même statut, aussi l'élève n'a-t-il pas le même rapport à la connaissance.

Une approche plus pragmatique révèle que ces phases sont imbriquées, mais les recherches en didactique déterminent des temps dominants exprimés sous la forme d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. Il existe au cours de ces différents moments une sorte d'échange et de régulation entre les personnages de la classe. C'est ainsi que Brousseau définit le terme de dialectique comme une méthode pédagogique suscitant la réflexion intellectuelle.

Il décrit dans un premier temps la dialectique de l'action. Elle consiste à proposer à l'élève une situation problème, une situation qui lui pose problème et dont la meilleure solution, dans ces conditions, est la connaissance à enseigner. Action signifie ici résoudre un problème.

L'élève doit agir sur la situation et c'est elle qui lui renvoie de l'information sur son action. De façon à résoudre le problème posé, l'élève va devoir travailler seul un moment. Le maître se doit d'adopter une posture en retrait et d'essayer de s'effacer quelque temps, de façon à ce que l'élève puisse réfléchir, chercher, essayer seul. Il manifeste ainsi l'acquisition de certains savoirs sous la forme de prise de décision. Il est en mesure de juger le résultat de son action. Il abandonne ou améliore son modèle de façon à en créer un autre. La situation elle-même provoque un apprentissage par adaptation selon le terme des théories piagésiennes. Il s'instaure un véritable dialogue entre l'élève et la situation. Cette dialectique lui permet de créer un modèle implicite.

Brousseau évoque ensuite la dialectique de la formulation. Lors de la situation de formulation, l'élève s'explique; il formule à l'oral ou à l'écrit; il explicite son raisonnement; il développe sa manière de faire, de façon à ce que cette explication ait du sens pour lui; il faut qu'il puisse s'en servir pour obtenir ou faire obtenir à un autre des résultats. Il échange des informations avec ses pairs ou avec le maître; il explique son modèle implicite. Ainsi le maître veille-t-il à la nature des conceptions, à celle du savoir et à celle du vocabulaire. Le langage choisi peut être un langage naïf sous forme de formulations spontanées ou un langage scientifique déjà élaboré. Le résultat de cette dialectique permet de créer un modèle explicite formulé à l'aide de signes, de règles ou

d'éléments de langage communs connus ou nouveaux.

Puis ce chercheur détaille la dialectique de la validation. Il explique que la validation empirique obtenue lors des phases précédentes est insuffisante. L'élève doit maintenant montrer pourquoi le modèle qu'il vient de créer est valide. Les déclarations font donc place à l'argumentation dans le but de justifier l'exactitude et la pertinence de son modèle. Ainsi, de façon à ce que l'élève construise une forme de démonstration et qu'elle ait du sens pour lui, il doit convaincre ses pairs. Il fournit dans la mesure du possible une validation gestuelle, sémantique ou syntaxique.

Enfin Brousseau explique la dialectique de l'institutionnalisation. Ainsi construite et validée, la nouvelle connaissance est reconnue dans le patrimoine mathématique de la classe. Elle est traduite en des termes rigoureux mais elle n'a pas encore le statut de savoir social. La phase d'institutionnalisation est celle où le maître fixe de manière conventionnelle et explicite le statut cognitif du savoir. La nouvelle connaissance change de statut d'une manière plus simple. Il s'agit de celle que l'élève doit retenir, de celle que l'élève doit apprendre. Cette phase fondamentale de l'apprentissage reste difficile à mettre en œuvre. En effet, elle ne doit pas être prématurée sinon elle interrompt la construction du sens et elle nuit à l'apprentissage attendu. C'est une difficulté pour le travail du maître et celui de ses élèves. Cette phase ne doit pas être trop tardive car les conceptions fausses et les interprétations erronées ralentissent les apprentissages. Elle doit être négociée de manière très subtile dans une dialectique. Il revient au maître de déterminer la forme et l'étendue du savoir auquel il entend donner un statut officiel.

La mise en mots de ces diverses dialectiques nécessite une structure rigoureuse et linéaire. Une réflexion plus pragmatique souligne le fait que ces différents moments de l'apprentissage sont beaucoup plus imbriqués et enchevêtrés que la théorie ne semble le décrire. Dans tous les cas, ils se terminent par des moments plus systématiques de résolution d'exercices d'application et d'approfondissement qui ont pour objet de compléter le processus cognitif. De façon à ce que l'élève, dans chacune des étapes de son travail, comprenne la tâche qui lui est demandée et la manière dans laquelle il lui est possible de s'y engager, il est indispensable qu'un contrat clair et précis soit défini dans la relation pédagogique.

Le contrat didactique

La réflexion sur les situations d'enseignement nécessite l'évocation des formes de travail établies de manière implicite ou explicite entre le maître et ses élèves dans l'apprentissage de la connaissance. Brousseau appelle contrat didactique l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant.

Ce contrat est l'ensemble des règles qui déterminent explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire de la relation didactique va avoir à gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable devant l'autre. Il convient d'éclairer cette définition. En effet, la relation entre le maître et l'élève dépend d'un nombre important de règles et de conventions qui ne mettent pas toutes systématiquement en jeu la connaissance. Il faut donc distinguer le contrat didactique lié au savoir, du contrat pédagogique qui est davantage associé à des us et coutumes d'un système d'éducation donné. Ensuite, la stratégie d'enseignement choisie librement par le maître, est un élément déterminant et essentiel du contrat didactique. En clair, l'acquisition du savoir est l'enjeu fondamental du contrat didactique, ce qui signifie qu'il doit être négocié à chaque étape de l'apprentissage et ainsi renouvelé. Ce sont trop

souvent les transgressions qui manifestent les incompréhensions de contrats mal posés et qui créent d'inévitables difficultés dans l'apprentissage. Il va de soi que les prouesses demandées de façon quotidienne aux maîtres et aux élèves les amènent à adopter quelquefois des attitudes, des comportements, des postures ou des discours qui ne favorisent pas l'explicitation rigoureuse et la bonne compréhension des contrats didactiques visant des apprentissages efficaces et de qualité.

Le langage mathématique

La nature même des objets mathématiques est abstraite et les concepts géométriques se construisent dans l'esprit des élèves de manière intellectuelle. Les conceptions vygotkiennes de l'apprentissage déterminent comme fondamental le langage, puissant outil du développement de la pensée formelle. Les recherches en didactique insistent avec ferveur sur la dialectique de la formulation où le langage, mise en mots de méthode, de raisonnement ou de savoir, constitue un élément essentiel de la construction de la pensée et un vecteur important de la formalisation scientifique.

Il est clair que les conceptions traditionnelles de l'apprentissage du langage mathématique le déclinent le plus souvent à l'écrit plutôt qu'à l'oral. Or il convient d'accorder une place importante au parler, lire et écrire. Les élèves sont amenés à utiliser la langue usuelle à l'aide de formulations spontanées et à comprendre les éléments spécifiques du langage mathématique, comme le vocabulaire et les symboles et à s'exprimer à l'aide de sa syntaxe particulière. Cela signifie que les apprentissages mathématiques fondés sur l'action, qui par essence présente un caractère concret et muet, doivent s'appuyer sur l'expression orale, puis ensuite sur l'expression écrite. La parole est celle des élèves, elle est aussi celle du maître, de la même façon les écrits sont ceux du maître ou ceux des élèves. Il convient de souligner que l'oral et l'écrit ne mettent pas toujours en valeur la même information. À ce sujet, les moments de formulation et de validation définis en didactique se déroulent essentiellement de manière orale. De façon à ne pas freiner la volonté des élèves dans l'apprentissage, il est conseillé au maître de veiller à maintenir un équilibre entre leurs formulations empruntées au langage courant et des expressions langagières améliorées, puis de plus en plus- élaborées, ceci dans le but de donner du sens au vocabulaire précis, lorsque le concept est en construction et évoque des images mentales naissantes.

Le statut des écrits

Les différents écrits en mathématiques correspondent à chacune des dialectiques de la théorie des situations didactiques.

Dans un premier temps, il convient de reconnaître l'écrit de recherche. Il est appelé plus couramment en mathématique l'écrit de brouillon, ou feuille de brouillon, ou cahier de brouillon, plus simplement brouillon. Il est important que l'élève puisse disposer de cet espace de travail qu'il gère selon sa personnalité. En ce sens, cet écrit n'a pas les caractéristiques formelles demandées pour la présentation définitive d'une solution élaborée. Dans l'apprentissage, il doit garder son statut privé. Cependant le maître a un droit de regard, de façon à étudier le cheminement de l'élève, à découvrir ses difficultés ou à s'apercevoir de ses progrès. Cet écrit de brouillon est parfois défini comme l'écrit de travail : c'est un écrit provisoire généralement court, assorti de

quelques notes à caractère personnel; il aide à la construction des connaissances et à la structuration des modes de raisonnement.

Ensuite, il convient de reconnaître l'écrit destiné à être communiqué et discuté. Il peut prendre des formes diverses et il est souvent présenté dans la classe sous forme d'une affiche. Il a pour but d'explicitier une démarche, d'évoquer des résultats, de mettre en évidence des modes de pensée implicites. Il fait l'objet d'un souci de présentation soignée et de lisibilité, même s'il est revu et corrigé lors des moments d'échanges entre les élèves et des moments de synthèse menés par le maître.

Enfin, il convient de reconnaître un écrit d'une tout autre nature : l'écrit de référence. Il s'agit de mettre en texte une nouvelle connaissance, de manière à en faire une référence. Sa conception et sa mise en page sont faites lors des moments d'institutionnalisation. En didactique, le savoir change de statut : il est reconnu et validé, il nécessite une exigence sémantique et syntaxique. Il est souvent présenté sous forme d'une affiche dans la classe qui trouve sa place comme aide-mémoire. Il aboutit à la trace écrite dans le cahier de cours. En ce sens, il a bien le statut de cahier de l'élève comme support des apprentissages en mathématiques, puisque sa conception découle des mouvements de pensée en épistémologie génétique et cognitive et en didactique des mathématiques.

La didactique de la géométrie

La géométrie est difficile du fait de son histoire, de son statut épistémologique et de la moindre richesse des travaux de recherche en didactique. La didactique de la géométrie est nouvelle. Elle trouve ses fondements dans plusieurs registres, ce qui explique sa complexité.

Le premier est celui de l'histoire de la géométrie. Les plus anciens textes mathématiques, retrouvés sur des tablettes d'argile de la civilisation babylonienne et sur des papyrus de la civilisation égyptienne, laissent supposer que l'origine de la géométrie est liée à la résolution de problèmes pratiques comme la mesure de surfaces des champs et la construction de monuments d'architecture.

La civilisation grecque joue un rôle fondamental dans le développement des sciences occidentales. Les écoles de philosophie donnent naissance à une science déductive qui se dégage du monde sensible, sous forme de définitions et de théorèmes. Les idées platoniciennes distinguent le monde réel et le monde abstrait de la géométrie, science soumise aux lois du raisonnement. La géométrie euclidienne est le fondement de la géométrie hellénistique.

Dès le début du IX^e siècle, les érudits de la civilisation arabe traduisent les ouvrages de la géométrie grecque et, avec enthousiasme, assimilent les connaissances du passé et enrichissent les recherches.

Dans le monde occidental, l'ignorance des premiers modèles de géométrie est presque totale. C'est seulement à partir du XIII^e siècle, avec la création des universités, et jusqu'à la fin du Moyen Âge, que la diffusion de cette science nouvelle apporte ses richesses. À la Renaissance, le développement des échanges commerciaux avec les villes du Moyen-Orient facilite l'introduction des travaux des savants arabes.

En Occident, la naissance des règles de la perspective classique et de la géométrie projective des maîtres d'art italiens affine la réflexion sur la représentation de l'espace. Ensuite, l'idée fondamentale des mathématiciens du XVIIe siècle est de concevoir une application de l'algèbre à la géométrie comme géométrie analytique appelée ensuite géométrie cartésienne.

L'apparition au XIXe siècle de la théorie des ensembles en mathématique apporte une dimension et un regard nouveau sur les axiomatiques euclidiennes et c'est ainsi que se construisent des conceptions plus abstraites comme les géométries non euclidiennes qui sont des modèles puissants dans les domaines de la recherche.

Le deuxième registre qui justifie la complexité de la géométrie est celui de son statut épistémologique. Les études de son histoire de l'enseignement soulignent de fréquents et profonds changements de statuts de cette discipline de l'école. Elle est assimilée au dessin, au calcul, à la mesure. Ces nombreuses confusions sont encore sources de conception erronée dans les pratiques.

Le dernier registre est la définition des objectifs d'apprentissage. Pour les plus récents, l'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets géométriques du plan et de l'espace et de passer progressivement d'une géométrie perceptive où les objets et leurs propriétés sont conçus par la perception et les sens, à une géométrie plus abstraite où sont explicités clairement le nom des figures, la connaissance des propriétés, ceux-ci validés à l'aide d'outils, de techniques ou de l'utilisation des instruments de dessin.

Il s'agit aussi pour l'élève d'affiner sa vision de l'espace, de façon à favoriser la mise en place d'images mentales des principaux concepts géométriques afin de donner du sens au vocabulaire spécifique.

Les situations en géométrie à l'école ne visent pas des connaissances formelles: celles-ci relèvent des apprentissages du collège.

Les connaissances en géométrie à l'école sont des outils pour résoudre des problèmes. Les situations sont proposées dans l'espace ordinaire, l'espace sensible, le macro-espace en didactique, dans l'espace de la classe, le méso-espace ou bien dans un espace plus épuré, le micro-espace, celui de la table de l'élève, celui de la feuille de papier ou celui d'un écran.

Des savoirs qui s'acquièrent en acte

Les textes ministériels relatifs à la mise en œuvre du socle commun de connaissances et de compétences argumentent aussi le fait que les savoirs en géométrie s'acquièrent en acte dans la résolution de problèmes variés sur des objets de la réalité et ensuite sur des figures. L'apprentissage du voir dans l'espace y est finement exposé. Il est bien d'évoquer des éléments nouveaux empruntés à la réflexion sur l'enseignement des mathématiques sous la direction de Jean-Pierre Kahane et de proposer diverses orientations des apprentissages en géométrie.

L'enseignement de la géométrie à l'école a pour objet de développer la vision de l'espace, c'est-à-dire de fournir une connaissance familière de l'espace dans la formation du citoyen. Il a pour objectif de développer des qualités d'observation, d'intuition et de rigueur, de façon à apprendre à réfléchir et à raisonner. Il a pour but d'initier aux fonctions de la géométrie dans les domaines culturels et esthétiques. Enfin il doit permettre de comprendre l'importance de cette discipline dans la vie courante et dans la vie professionnelle.